

文章编号: 1000-8055(2009)04-0810-05

转轴裂纹扩展的可靠性灵敏度分析

苏长青, 张义民, 马 辉
(东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

摘 要: 在 Paris-Erdogan 裂纹扩展模型的基础上, 考虑裂纹扩展模型的随机参数影响, 采用裂纹长度失效准则建立了旋转机械转轴裂纹扩展的可靠性模型, 应用随机摄动理论和 Kronecker 代数导出了状态函数的前四阶矩, 应用应力-强度干涉理论和四阶矩技术确定了转轴裂纹扩展的可靠性, 利用矩阵微分理论和灵敏度技术系统地研究了转轴裂纹扩展的可靠性灵敏度问题。

关 键 词: 转轴; 裂纹扩展; 随机摄动; 可靠性灵敏度

中图分类号: V231.95

文献标识码: A

Reliability sensitivity analysis for crack propagation of rotating shaft

SU Chang-qing, ZHANG Yi-min, MA Hui

(School of Mechanical Engineering and Automation,
Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Based on the Paris-Erdogan crack propagation model, the effect of random parameters on the crack propagation model was considered. The reliability model for crack propagation of rotating shaft in rotating machinery was presented by the crack length failure criteria. The first four moments of state function were derived from the random perturbation theory and the Kronecker algebra. The reliability of crack propagation was determined by using the stress-strength interference theory and the fourth moment method. The reliability sensitivity analysis of crack propagation was studied by using the matrix calculus theory and sensitivity technique.

Key words: rotating shaft; crack propagation; random perturbation; reliability sensitivity

在旋转机械中, 转轴裂纹已成为常见的故障。转轴裂纹与其他旋转机械转子系统故障(碰摩、支撑松动)相比, 更具有危险性和破坏性^[1]。转轴在制造过程中不可避免的存在着一些微小的裂纹。由于工作条件和环境等因素的影响, 这些微小的裂纹会随着工作的时间而增长。如果不能有效的对转轴裂纹扩展进行实时跟踪和故障预测, 就极容易发生转轴断裂事故。因此对于转轴裂纹扩展的可靠性灵敏度问题显得尤为重要。

可靠性灵敏度设计是在可靠性分析的基础上进行的灵敏度设计, 更能直观地从定量分析反映随机参数对系统可靠性的影响。在实际工程设计中, 若系统某随机参数对结构的失效有较大的影响, 则在设计和制造过程中要研究加以控制; 反之, 如果某随机参数的变异性对结构系统可靠性的影响不显著, 则在结构设计时, 就可以把它当成确定量来处理以减小随机参数的数目。目前, 结构可靠性灵敏度计算方法已有了较大的发展^[2-7], 这

收稿日期: 2008-03-17; 修订日期: 2008-08-19

基金项目: 国家高科技研究发展计划(2007AA04Z442); 国家自然科学基金(50805019)

作者简介: 苏长青(1979-), 男, 辽宁盘锦人, 博士生, 主要从事转子动力学、随机振动系统可靠性研究。

些方法提供了有效的可靠性灵敏度的计算方法。

本文基于 Paris-Erdogan 裂纹扩展模型, 考虑了转轴相关参数的随机性, 采用裂纹长度模型, 建立转轴裂纹随机扩展的可靠性模型, 应用随机摄动理论确定状态函数的前四阶矩, 结合四阶矩技术、可靠性理论和灵敏度理论研究了转轴裂纹扩展的可靠性灵敏度问题, 从而为转轴裂纹扩展的预防提供了一定的理论依据。

1 疲劳裂纹扩展模型

疲劳裂纹扩展模型通常用 $da/dN = L(\Delta K, K_{\max}, S, a, \dots)$ 函数来描述, 目前工程上采用最多的是 Paris-Erdogan 公式^[8], 即

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

式中 a 为裂纹长度, N 为应力循环次数, m 和 C 为材料系数, 在实际工程中, m 和 C 具有很强的随机性。一般情况下, 参数 m 服从正态分布, 参数 C 服从对数正态分布, ΔK 为应力强度变程, 根据线弹性断裂力学理论, 其表达式为

$$\Delta K = F(\phi)S\sqrt{\pi a} = F_c F_s F_w F_g S\sqrt{\pi a} \quad (2)$$

式中 S 为应力变程, $F(\phi)$ 为与应力集中有关的几何因子函数, ϕ 为转轴裂纹的深度比 ($\phi = a/D$, a 为转轴裂纹深度, D 为转轴直径), F_c, F_s, F_w, F_g 分别为裂纹形状因子、自由表面因子、有限宽度因子和应力梯度因子。根据 Daoud 和 Cartwright 采用有限元方法对 $F(\phi)$ 的研究, 表面裂纹几何因子 $F(\phi)$ 可以表示为^[9]

$$F(\phi) = 1.04 - 3.64\phi + 16.86\phi^2 - 32.59\phi^3 + 28.41\phi^4 \quad (3)$$

对式(1)分离变量并积分可得

$$\int_{a_0}^N \frac{da}{[F(\phi)\sqrt{\pi a}]^m} = \int_0^N C S^m dN = C S^m N \quad (4)$$

式中 a_0 为初始裂纹长度, S 为循环应力幅值。

2 随机摄动理论

设系统状态函数为 $g(\mathbf{X})$, $g(\mathbf{X})$ 为系统随机参数向量 $\mathbf{X}$ 的函数, $\mathbf{X}$ 和 $g(\mathbf{X})$ 可表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_d + \varepsilon \mathbf{X}_p \quad (7)$$

$$g(\mathbf{X}) = g_d(\mathbf{X}) + \varepsilon g_p(\mathbf{X}) \quad (8)$$

式中 ε 为一小参数, 下标为 d 的部分表示随机参数中的确定部分, 下标为 p 的部分表示随机参数中的随机部分, 且具有零均值。显然要求随机部分要比确定部分小得多。对式(7)、式(8)取数学期望, 有

$$E(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}_d) + \varepsilon E(\mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_d = \bar{\mathbf{X}} \quad (9)$$

$$E[g(\mathbf{X})] = E[g_d(\mathbf{X})] + \varepsilon E[g_p(\mathbf{X})] =$$

$$g_d(\bar{\mathbf{X}}) \quad (10)$$

同理, 根据 Kronecker 代数理论, 随机参数 $\mathbf{X}$ 和状态函数 $g(\mathbf{X})$ 的方差、三阶矩、四阶矩可分别表示为

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{[2]}\} = \varepsilon^2 [\mathbf{X}_p^{[2]}] \quad (11a)$$

$$\text{Tm}(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{[3]}\} = \varepsilon^3 [\mathbf{X}_p^{[3]}] \quad (11b)$$

$$\text{Fm}(\mathbf{X}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^{[4]}\} = \varepsilon^4 [\mathbf{X}_p^{[4]}] \quad (11c)$$

$$\text{Var}[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{[2]}\} = \varepsilon^2 \{[g_p(\mathbf{X})]^{[2]}\} \quad (12a)$$

$$\text{Tm}[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{[3]}\} = \varepsilon^3 \{[g_p(\mathbf{X})]^{[3]}\} \quad (12b)$$

$$\text{Fm}[g(\mathbf{X})] = E\{[g(\mathbf{X}) - E(g(\mathbf{X}))]^{[4]}\} = \varepsilon^4 \{[g_p(\mathbf{X})]^{[4]}\} \quad (12c)$$

式中 $\mathbf{P}^{[k]} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}^{[k-1]} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \otimes \dots \otimes \mathbf{P}$, 符号 $\otimes$ 代表 Kronecker 积, 定义为 $(\mathbf{A})_{p \times q} (\mathbf{B})_{s \times t} = [a_{ij} \mathbf{B}]_{ps \times qt}$ 。

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式, 当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时, 可以把 $g_p(\mathbf{X})$ 在 $E(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{X}}$ 附近展开到一阶为止, 有

$$g_p(\mathbf{X}) = \frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T} \mathbf{X}_p \quad (13)$$

把式(13)代入式(12), 有

$$\text{Var}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^2 E\left[\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[2]} \mathbf{X}_p^{[2]}\right] =$$

$$\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[2]} [\text{Var}(\mathbf{X})] \quad (14a)$$

$$\text{Tm}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^3 E\left[\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[3]} \mathbf{X}_p^{[3]}\right] =$$

$$\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[3]} [\text{Tm}(\mathbf{X})] \quad (14b)$$

$$\text{Fm}[g(\mathbf{X})] = \varepsilon^4 E\left[\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[4]} \mathbf{X}_p^{[4]}\right] =$$

$$\left[\frac{\partial g(\bar{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^T}\right]^{[4]} [\text{Fm}(\mathbf{X})] \quad (14c)$$

式中 $\text{Var}(\mathbf{X})$, $\text{Tm}(\mathbf{X})$, $\text{Fm}(\mathbf{X})$ 分别为随机参数的方差向量、三阶矩向量和四阶矩向量。

3 可靠性分析

目前, 国内外在疲劳裂纹扩展可靠性分析问题上的研究, 其安全状态方程主要采用三种模型,

即断裂强度模型、裂纹长度模型、疲劳寿命模型。断裂强度模型是以含裂纹结构的断裂强度为随机变量,通过对断裂强度在随机载荷下随时间变化规律的研究,从而确定其寿命参数,应用应力强度干涉理论确定其结构可靠性;疲劳寿命模型是通过对比疲劳寿命和疲劳损伤累积规律的研究,以含裂纹结构的疲劳寿命为随机变量来估算结构可靠性的方法。裂纹长度模型是在研究裂纹随机扩展的基础上,以裂纹长度作为判据对含裂纹结构可靠性加以分析^[10]。本文采用裂纹长度模型,因此转轴裂纹扩展的可靠性状态函数定义为

$$g(a_L, a_N) = a_L - a_N \quad (15)$$

式中 a_L 为临界裂纹长度, a_N 为经过 N 次循环后的裂纹长度, $g(a_L, a_N)$ 表示了转轴的两种状态,即

$$\left. \begin{aligned} g(a_L, a_N) > 0 & \text{ 为安全状态} \\ g(a_L, a_N) \leq 0 & \text{ 为失效状态} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_g &= E[g(a_L, a_N)] = E(a_L) - E(a_N) = u_{a_L} - u_{a_N} \\ \sigma_g^2 &= \text{Var}[g(a_L, a_N)] = \sigma_{a_L}^2 + \sigma_{a_N}^2 \\ \theta_g &= E[g(a_L, a_N) - \bar{g}(a_L, a_N)]^3 = \text{Tm}(a_L) - \text{Tm}(a_N) \\ \eta_g &= E[g(a_L, a_N) - \bar{g}(a_L, a_N)]^4 = \text{Fm}(a_L) + \text{Fm}(a_N) + 6\text{Var}(a_L)\text{Var}(a_N) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

根据四阶矩技术,可靠性指标 β 定义为

$$\beta = \frac{3(\alpha_g - 1)u_g/\sigma_g + \sigma_g(\mu_g^2/\sigma_g^2 - 1)}{\sqrt{(9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9)(\alpha_g - 1)}} \quad (23)$$

式中 $\alpha_g = \theta_g/\sigma_g^3$, $\alpha_g = \eta_g/\sigma_g^4$ 分别为状态函数的偏态系数和峰态系数。对于任意的随机变量,其偏态系数和峰态系数有如下的关系:

$$\alpha_g \geq \alpha_g^2 + 1 \quad (24)$$

据此旋转机械转轴裂纹扩展的可靠度为

$$R(\beta) = 1 - \Phi(-\beta) = \Phi(\beta) \quad (25)$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

4 可靠性灵敏度分析

裂纹扩展可靠度 R 对随机参数向量 $\mathbf{B}$ 的均值的可靠性灵敏度为

对式(4)积分可得到转轴裂纹尺寸 a_N 表达式($m \neq 2$),即

$$a_N = \left[a_0^{\frac{2-m}{2}} + \frac{2-m}{2} CS^m \pi^{\frac{m}{2}} F^m(\phi) N \right]^{\frac{2}{2-m}} \quad (17)$$

根据随机摄动理论,转轴裂纹尺寸 a_N 的均值、方差、三阶矩和四阶矩可以分别表示为随机参数矩阵 $\mathbf{B} = [a_0 m C \phi S]^T$ 的函数,即

$$E(a_N) = a_N(\mathbf{B}) \quad (18)$$

$$\text{Var}(a_N) = \left[\frac{\partial a_N(\mathbf{B})}{\partial(\mathbf{B})^T} \right]^{[2]} [\text{Var}(\mathbf{B})] \quad (19)$$

$$\text{Tm}(a_N) = \left[\frac{\partial a_N(\mathbf{B})}{\partial(\mathbf{B})^T} \right]^{[3]} [\text{Tm}(\mathbf{B})] \quad (20)$$

$$\text{Fm}(a_N) = \left[\frac{\partial a_N(\mathbf{B})}{\partial(\mathbf{B})^T} \right]^{[4]} [\text{Fm}(\mathbf{B})] \quad (21)$$

因此状态函数 $g(a_L, a_N)$ 的前四阶矩可以表示为

$$\frac{DR(\beta)}{D\mathbf{B}^T} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial u_g} \frac{\partial u_g}{\partial u_{a_N}} \frac{\partial u_{a_N}}{\partial \mathbf{B}^T} \quad (26)$$

$$\text{式中} \quad \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} = \Phi(\beta) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial u_g} = \frac{3(\alpha_g - 1)/\sigma_g + 2\alpha_g \mu_g/\sigma_g^2}{\sqrt{(9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9)(\alpha_g - 1)}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial u_{a_N}} = -1 \quad (29)$$

$$\frac{\partial u_{a_N}}{\partial \mathbf{B}^T} = \left[\frac{\partial u_{a_N}}{\partial b_1} \quad \frac{\partial u_{a_N}}{\partial b_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial u_{a_N}}{\partial b_n} \right] \quad (30)$$

裂纹扩展可靠度 R 对随机参数向量 $\mathbf{B}$ 的方差的可靠性灵敏度为

$$\frac{DR(\beta)}{D\text{Var}(\mathbf{B})} = \frac{\partial R(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} \frac{\partial \sigma_g}{\partial \sigma_{a_N}} \frac{\partial \sigma_{a_N}}{\partial \text{Var}(\mathbf{B})} \quad (31)$$

式中

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_g} = \frac{- \left[3(\alpha_g - 1) \frac{u_g}{\sigma_g^2} + 2\alpha_g \frac{u_g^2}{\sigma_g^3} + \frac{12\alpha_g u_g}{\sigma_g^2} + \frac{3\alpha_g}{\sigma_g} \left(\frac{u_g^2}{\sigma_g^2} - 1 \right) \right]}{\sqrt{(9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9)(\alpha_g - 1)}} - \frac{1}{2} \frac{\left[- \frac{36\alpha_g}{\sigma_g} + \frac{30\alpha_g^2}{\sigma_g} \right] (\alpha_g - 1) - (9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9) \frac{4\alpha_g}{\sigma_g}}{\sqrt{(9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9)^3 (\alpha_g - 1)^3}} \times \frac{3(\alpha_g - 1) \frac{u_g}{\sigma_g} + \alpha_g \left(\frac{u_g^2}{\sigma_g^2} - 1 \right)}{\sqrt{(9\alpha_g - 5\sigma_g^2 - 9)^3 (\alpha_g - 1)^3}} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \sigma_{a_N}} = \frac{\sigma_{a_N}}{\sigma_g} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \sigma_{a_N}}{\partial \text{Var}(\mathbf{B})} = \frac{1}{2\sigma_g} \left[\frac{\partial u_{a_N}}{\partial \mathbf{B}} \otimes \frac{\partial u_{a_N}}{\partial \mathbf{B}} \right] \quad (34)$$

把已知条件和可靠性分析的计算结果代入式 (26) 和 (30), 就可以获得可靠性灵敏度 DR/DB 和 $DR/DVar(B)$.

5 数值算例

若某一旋转机械为不间断连续工作, 转轴的随机变量统计特性如表 1 所示. 临界裂纹长度 a_L 作为随机变量, 其变异系数为 0. 05, 三阶矩 $Tm(a_L)$ 和四阶矩 $Fm(a_L)$ 可根据式(24) 确定. 试确定此转轴裂纹扩展的可靠性灵敏度.

经过计算得到此转轴裂纹扩展的可靠性指标、可靠度和可靠性灵敏度. 表 2 给出了本文方法和 Monte Carlo 方法所计算出的可靠度对随机参数均值的灵敏度. 表 3 给出了本文方法和 Monte Carlo 方法^[11] 所计算出的可靠度对随机参数方差的灵敏度. 从表 2 可以看出, 裂纹初始长度 a_0 、材料系数 m 、 C 、深度比 ϕ 和循环应力幅值 S 的均值

增加, 其结果将使可靠度降低. 其变化率最大的为材料系数 C , 最小的为循环应力幅值. 从表 3 可以看出, 裂纹初始长度 a_0 、材料系数 m 、 C 、深度比 ϕ 和循环应力幅值 S 的方差增加, 其结果也将使可靠度降低. 其变化率最大的为材料系数 C , 最小的为循环应力幅值.

表 1 转轴随机变量统计特性

Table 1 Statistical characteristic of random parameters		
变量名	均值	变异系数
a_0	0. 5 mm	0. 05
m	2. 4	0. 1
C	5×10^{-10}	0. 63
ϕ	0. 01	0. 1
S	13. 79 MPa	0. 34
N	6×10^5	0

表 2 可靠度对参数均值的可靠性灵敏度分析结果

Table 2 Sensitivity of reliability to the mean value of random parameters

方法	$\frac{DR}{Da_0} \times 10^{-2}$	$\frac{DR}{Dm} \times 10^{-3}$	$\frac{DR}{DC} \times 10^6$	$\frac{DR}{D\phi} \times 10^{-2}$	$\frac{DR}{DS} \times 10^{-3}$	β	R
本文方法	- 1. 679 359	- 2. 682926	- 9. 529 159	- 4. 513 164	- 1. 504263	2. 905 715	0. 998168 1
Monte Carlo 方法	- 1. 753 934	- 2. 80172	- 9. 952	- 4. 713 388	- 1. 555 94	2. 888 694	0. 998065 7

表 3 可靠度对参数方差的可靠性灵敏度分析结果

Table 3 Sensitivity of reliability to the variance of random parameters

方法	$\frac{DR}{D\sigma_{a_0}^2} \times 10^{-2}$	$\frac{DR}{D\sigma_m^2} \times 10^{-3}$	$\frac{DR}{D\sigma_C^2} \times 10^{16}$	$\frac{DR}{D\sigma_\phi^2}$	$\frac{DR}{D\sigma_S^2} \times 10^{-4}$	β	R
本文方法	- 5. 893773	- 1. 504 263	- 1. 897647	- 0. 425666	- 1. 436 976	2. 905715	0. 998168 1
Monte Carlo 方法	- 6. 097 75	- 1. 554 64	- 1. 963194	- 4. 403 61	- 1. 4866	2. 888694	0. 998065 7

从表 2 和表 3 可以看出, 本文方法得到的可靠性灵敏度分析的结果与 Monte Carlo 法得到的结果基本一致, 只是数值相比 Monte Carlo 法得到的结果偏小, 这主要是由于采样数量所造成的. 本文方法与 Monte Carlo 法相比计算量明显减小. 上面的计算结果与通常的定性分析结果完全一致, 这进一步说明了灵敏度分析对转轴裂纹扩展各因素分析的全面性和正确性. 从前面的灵敏度分析可得到如下结论: 在转轴的设计、制造、使用和评估中, 要严格控制敏感参数的变化, 从而避免转轴断裂故障的发生.

6 结 论

转轴裂纹一直都是旋转机械的主要故障, 转轴的疲劳寿命的评估对于转轴断裂故障的预防起着举足轻重的作用. 本文基于 Paris-Erdogan 裂纹扩展模型, 应用随机摄动理论和四阶矩技术建立了转轴裂纹扩展的可靠性模型, 应用矩阵微分理论和灵敏度技术研究了裂纹扩展的可靠性灵敏度问题. 本文提出的方法相对于裂纹扩展可靠性的二阶矩方法具有较高的精度. 另外, 本文对于随机参数的分布概型没有作任何限制, 只需知道随

机参数的前两阶矩,所以本文采用的方法对工程实际有着重要的意义.

参考文献:

- [1] 闻邦椿,武新华,丁千,等.故障旋转机械非线性动力学的理论与试验[M].北京:科学出版社,2004.
- [2] Madsen H O, Krenk S, Lind N C. Methods of structural safety[M]. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc., 1986.
- [3] Hohenbichler M, Rackwitz R. Sensitivity and importance measures in structural reliability[J]. Civil Engineering Systems, 1986, 3(4): 203-209.
- [4] Bjerager P, Krenk S. Parametric sensitivity in first order reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 1989, 115(7): 1577-1582.
- [5] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 55-61.
- [6] 张义民,刘巧伶,闻邦椿.非线性随机系统的独立失效模式可靠性灵敏度[J].力学学报,2003,35(1):117-120.
ZHANG Yimin, LIU Qiaoling, WEN Bangchun. Sensitivity of reliability in nonlinear random systems with independent failure modes[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(1): 117-120. (in Chinese)
- [7] 张义民,刘巧伶,李鹤,等.转子-定子系统碰摩可靠性灵敏度研究[J].航空动力学报,2006,21(5):848-853.
ZHANG Yimin, LIU Qiaoling, LI He, et al. Reliability sensitivity investigation of impact rub for rotor-stator systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(5): 848-853. (in Chinese)
- [8] Paris P C, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws[J]. J. Basis Engng, Trans. ASME, Series D, 1963, 85: 528-534.
- [9] Shih Y S, Chen J J. Analysis of fatigue crack growth on a crack shaft[J]. International Journal of Fatigue, 1997, 19: 477-485.
- [10] 吕海波,姚卫星.结构元件疲劳断裂可靠性估算方法[J].力学进展,2000,30(4):538-545.
LÜ Haibo, YAO Weixing. A review of the evaluation methods of fatigue fracture reliability of structural elements[J]. Advances in Mechanics, 2000, 30(4): 538-545. (in Chinese)
- [11] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 55-61.